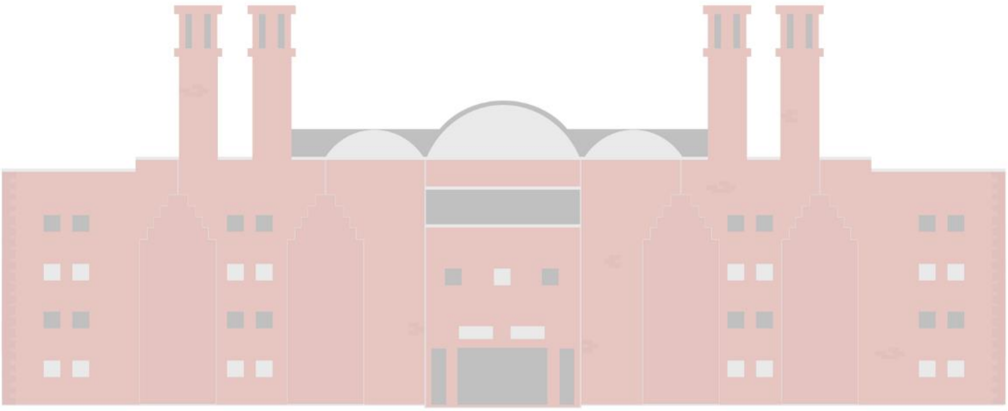
RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الرابعة

5 صفحات



الدكتور: نبيل صبح

التاريخ: ٢٠١٤/٩/٢٤

:. التكامل الخطي الشعاعي للتابع $f \in cl(D)$ على المنحني الموُجه Γ:.

هو الشعاع : $\int_\Gamma \vec{F} \wedge \overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} & \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \int_\Gamma & F_1 & F_2 & F_2 \\ & dx & dy & dz \end{vmatrix}$

:.التكامل الخطي الشعاعي للتابع العددي $f \in cl(D)$ على المنحني الموُجه Γ:.

و هو الشعاع :

$$\int_\Gamma f.\overrightarrow{dl} = \hat{\imath}\int_\Gamma f.dx + \hat{\jmath}\int_\Gamma f.dy + \hat{k}\int_\Gamma f.dz$$

:.التكاملات السطحية على سطح موجه:.

$\sum$

<u>**السطح الموَجّه**</u>: إن المنحني الموَجّه وفقاً لواجهة مماسه $\hat{t}$ يقابله سطح موجه وفقاً لوجهة ناظمة $\hat{n}$ (حيث إن المنحني هو حافة $\sum$).

إذا كان السطح موجّه، مفتوح وبسيط بأحد الاتجاهات x أو y أو z .

(ليكن موجّه باتجاه z) و ذو حافة ملساء أو ملساء جزئياً Γ، فإن له وجهان وفق الناظم ، وقد اصطلح على اعتبار $\hat{n}$ موجه وفق اتجاه تقدم بِزال (بُرغي) يدور وفق طريقة توجيه الحافة Γ .Σ

- إذا كان السطح أملس جزئيا نوجه كل جزء أملس على حدى.
- إذا كان السطح مغلق فقد اصطلح إن يكون $\hat{n}$ موجه إلى خارج السطح.
- نعرّف عنصر المساحة الموجه بالعلاقة $\overrightarrow{ds} = \hat{n}\ ds$

==

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

ملاحظة

السطح بسيط باتجاه z يعني أنه إذا مر أي مستقيم يوازي oz من نقطة وحيدة من سطح Σ فهذا

السطح يسمى بسيط باتجاه z إضافة إلى أن السطح البسيط يمكن عزل z من معادلته فتصبح بالشكل الآي :

$$y = h(x, y)$$

.:أنواع التكاملات السطحية:.

١-تدفق حقل شعاعي $\vec{F}$ عبر السطح $\sum$: (التكامل السطحي العددي لـ $\hat{F}$ على السطح الموجّه $\sum$)

هو العدد: $\iint_{\Sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iint_{\Sigma} (\vec{F}.\hat{n})ds = \iint_{\Sigma} g\ ds$

حيث $g = \vec{F}.\hat{n}$ هو تابع مستمر أو مستمر جزئيا على $\sum$ ، فالتدفق موجود.

ملاحظة

إذا كان $\sum$ سطح موجه وبسيط باتجاه Z فإن معادلته :

$$z = h(x, y)\ \ldots.\ h \in cl^1(R_z)$$

أو $G \in cl^1(\sum)\ ;\ G = h(x, y) - z = 0$

– من العلاقة بين عنصر المساحة ds و dA :

$$\Rightarrow ds = \sqrt{h_x'^2 + h_y'^2 + 1}\ dxdy = \|\vec{\nabla}h\| dxdy$$

بما أن: $\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}h}{\|\vec{\nabla}h\|} = \frac{-h_x'\ \hat{\imath} - h_y'\ \hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{h_x'^2 + h_y'^2 + 1}}$

نختصر $\|\vec{\nabla}h\|$ $\Rightarrow \overrightarrow{ds} = \hat{n}ds = \frac{\vec{\nabla}h}{\|\vec{\nabla}h\|}\ \|\vec{\nabla}h\|\ dxdy \ldots\ldots$

أي أن التدفق :

$$I = \iint_{\Sigma} (\vec{F}.\hat{n})ds = \iint_{R_z} (\vec{F}.\vec{\nabla}h)dxdy$$

$$= \iint_{R_z} (\vec{F}.\hat{n})ds = \iint_{R_z} (\vec{F}.\vec{\nabla}h)dxdy$$

– إذا كان السطح بسيط باتجاه x أو باتجاه y يعالج بأسلوب مشابه.

• **مثال:**

احسب تدفق الحقل $\vec{F}=(3z\,,-2\,,y)$ عبر السطح الموجه الواقع في الثمن الموجب . حيث: $\sum\ :\ x+y+z-1=0$

الحل:

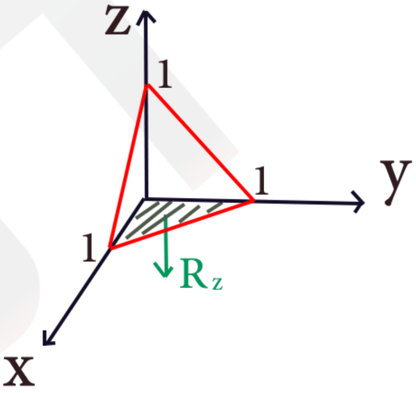
$$I=\iint_{\Sigma}(\vec{F}.\hat{n})ds=\iint_{R_z}(\vec{F}.\vec{\nabla}h)dxdy$$

$$=\iint_{R_z}(3z,-2,y).(1,1,1)dxdy$$

$$I=\iint_{R_z}(3z-2+y)dxdy\quad ;\ R_z: z=1-x-y$$

$$I=\iint_{R_z}(1-3x-2y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dy\int_{x=0}^{x=1-y}(1-3x-2y)$$



$$I=-\frac{1}{3}$$

==

٢-التكامل السطحي لتابع شعاعي $\vec{F}$على السطح الموجه Σ

هو الشعاع:

$$\iint_{\Sigma}\overrightarrow{ds}\wedge\vec{F}=\iint_{\Sigma}(\vec{n}\wedge\vec{F})ds$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{bmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ F_1 & F_2 & F_3\end{bmatrix}ds$$

حيث $\hat{n}=(\boldsymbol{\cos\alpha},\boldsymbol{\cos\beta},\boldsymbol{\cos\gamma})$

٣-التكامل السطحي الشعاعي لتابع عددي fعلى السطح الموجه Σ:

هو الشعاع:

$$\iint_{\Sigma} f.\overrightarrow{ds} = \iint_{\Sigma} (f\hat{n})ds$$

$$= \hat{\imath} \iint_{\Sigma} f.\cos\alpha \,.\, ds + \hat{\jmath} \iint_{\Sigma} f.\cos\beta \,.\, ds + \hat{k} \iint_{\Sigma} f.\cos\gamma \,.\, ds$$

التكامل الحجمي لتابع شعاعي $\vec{F}$

إن عنصر الحجم غير موجه وعليه يوجد تكامل وحيد لتابع شعاعي:

$$\iiint_{R} \vec{F} dv = \hat{\imath} \iiint_{R} F_1 dv + \hat{\jmath} \iiint_{R} F_2 dv + \hat{k} \iiint_{R} F_3 dv$$

نظريات التحويل من تكامل حجمي إلى ثنائي وبالعكس:

١-نظرية غاوس في التفرق:

ليكن $\vec{F} \in cl^1(R)$ حيث R منطقة فضائية محاطة بالسطح المغلق والموجه Σ، عندئذ التكامل الحجمي لتفرق $\vec{F}$ يساوي التدفق لـ $\vec{F}$ عبر Σ (التكامل السطحي العددي لـ $\vec{F}$)

$$\iiint_{R} (\vec{\nabla}.\vec{F}) dv = \oiint_{\Sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \oiint_{\Sigma} (\hat{n}.\vec{F}) ds$$

٢-المبرهنة الثانية:

ليكن $f \in cl^1(R)$ فإن التكامل الحجمي لتدرج f في R يساوي التكامل السطحي الشعاعي لـ f على Σ:

$$\iiint_{R} \vec{\nabla}.f.dv = \oiint_{\Sigma} f.\overrightarrow{ds} = \oiint_{\Sigma} (\hat{n}.f) ds$$

٣-المبرهنة الثالثة:

ليكن $\vec{F} \in cl^1(R)$ و إن التكامل الحجمي لدوران $\vec{F}$ في R يساوي التكامل السطحي لشعاعي لـ $\vec{F}$ على Σ :

$$\iiint_{R} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) dv = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{ds} \wedge \vec{F} = \oiint_{\Sigma} (\hat{n} \wedge \vec{F}) ds$$

ملاحظة

واضح من هذه المبرهنات أنه للانتقال من تكامل حجمي إلى سطحي يكفي استبدال $\vec{\nabla}$ بـ $\hat{n}$.

تعميم

يمكن تعميم هذه المبرهنات إلى الحالة التي يتكون فيها Σ من سطحين موجهين مغلقين أحدهما داخل الآخر (أو أكثر من سطحين) ويحسب التكامل الحجمي في المنطقة R المحصورة بين السطحين على أن يوجه الناظم دائماً خارج R.

مثال (١):

ليكن Σ سطح موجه املس يحد منطقة فراغية R لا تشمل o.

والمطلوب برهن أن:

$$\frac{\vec{r}.\overrightarrow{ds}}{r^2} = \iiint_R \frac{dv}{r^2}$$

الحل:

لما كان $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2} \in cl^1(R)$ نعوض في المبرهنة الأولى (نظرية غاوس في التفرق):

$$\oiint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^2}\overrightarrow{ds} = \iiint_R \vec{\nabla}.\left(\frac{1}{r^2}\,\vec{r}\right) dv \ldots *$$

من قواعد الاشتقاق:

$$\left(\vec{\nabla}.\frac{1}{r^2}\vec{r}\right) = \left(\vec{\nabla}.\frac{1}{r^2}\right).\vec{r} + \frac{1}{r^2}(\vec{\nabla}.\vec{r}) = -\frac{2}{r^3}\hat{r}\hat{r}r + \frac{1}{r^2}(3) = \frac{1}{r^2}$$

نعوض في * فنجد المطلوب.

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي